

Komplexe Zahlen — einmal anders *gesehen*

Gerhard Kowol, Wien

Komplexe Zahlen treten im Schulunterricht in natürlicher Weise bei der Behandlung quadratischer Gleichungen auf. Von daher lassen sie sich auch unmittelbar als Ausdruck eines geometrischen Sachverhalts interpretieren. Soll nämlich eine beliebige Gleichung 2. Grades

$$y^2 + ay + b = 0 \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

komplexe Lösungen besitzen, muß $b > \frac{a^2}{4} (\geq 0)$ gelten, und man sieht sofort, daß der Schnitt des Kreises $x^2 + (y + \frac{a}{2})^2 = (\frac{a}{2})^2$ mit der Geraden $x = (\pm)\sqrt{b}$ gerade auf jene Gleichung führt. Die Diskriminantenbedingung $b > \frac{a^2}{4}$ liefert dabei, daß diese Gerade – klarerweise – am Kreis vorbeiläuft.

Hält man den Kreis fest und variiert die Gerade, indem man b stetig anwachsen läßt, so ändern sich auch die komplexen Lösungen $y = -\frac{a}{2} \pm i\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$ stetig. Das legt die Frage nahe, ob diese gesetzmäßige Abhängigkeit eine tieferliegende geometrische Bedeutung besitzt als bloß den immer größer werdenden Abstand der Geraden vom Kreis widerzuspiegeln.

Eine andere Fragestellung wird durch die Tatsache aufgeworfen, daß ein komplexes Zahlenpaar $(r + is, u + iv)$, mit $(s, v) \neq (0, 0)$, genau eine reelle Geradengleichung erfüllt, nämlich

$$y = \frac{v}{s}(x - r) + u \quad (s \neq 0) \quad \text{bzw.} \quad x = r \quad (s = 0),$$

mithin als Punkt angesehen werden kann, der auf dieser Geraden liegt. Gibt es eine geometrische Veranschaulichung des komplexen Punktes, welche den Zusammenhang mit dieser Geraden erkennen läßt? Die Gaußsche Zahlenebene ist dazu ja offenbar nicht geeignet, müßte ein solches Paar doch vierdimensional oder mittels zweier Ebenen dargestellt werden.

Die prinzipielle klärende Antwort wurde bereits Mitte des vorigen Jahrhunderts von Christian von Staudt gegeben ([3]; s. auch Felix Klein [1]), doch gelang erst 1949 dem Schweizer Mathematiker Louis Locher-Ernst eine adäquate geometrische Symbolisierung von dessen Ergebnis ([2]).

Im Folgenden werden die Gedankengänge von Staudts und Locher-Ernsts auf elementarem Niveau dargestellt, so daß beide auch in den Schulunterricht Eingang finden könnten. Als Motivierung diene dabei das obige Beispiel in leicht modifizierter Form. Gegeben sei ein Kreis k und eine daran vorbeilaufende Gerade g mit den Gleichungen

$$k : x^2 + (y - a)^2 = r^2, \quad g : x = c \text{ mit } |c| > r.$$

Jedem Punkt $P \in g$ läßt sich nun unter Miteinbeziehung von k ein weiterer Punkt $P' \in g$ zuordnen, indem man zu P die Polare¹ p bildet und diese mit g schneidet (Figur 1); ausgenommen ist hier einzig der Punkt $M(c, a) \in g$, da dessen Polare parallel

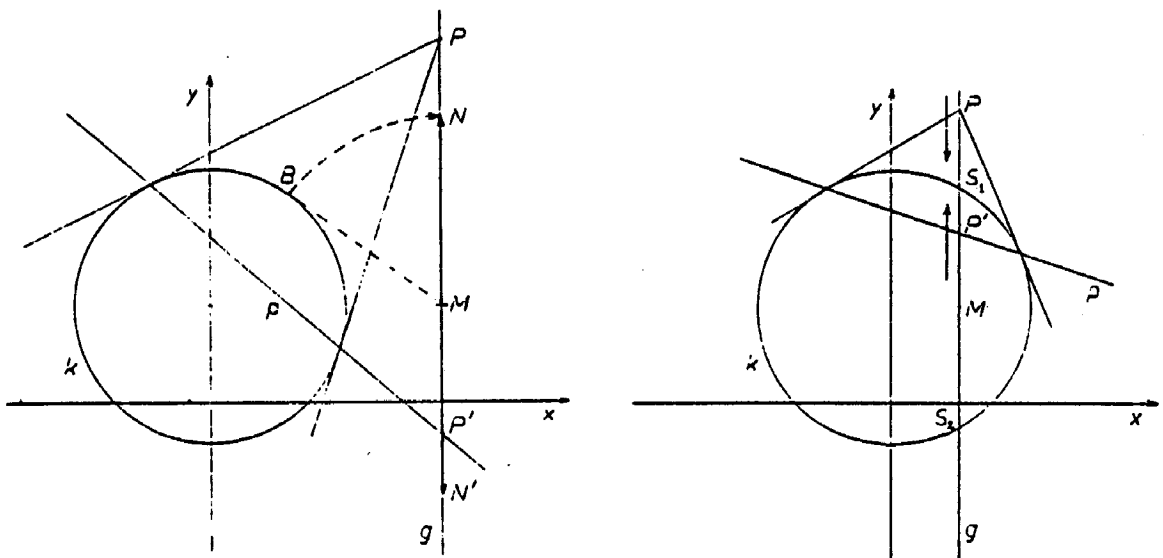


Fig. 1 & 2

zu g verläuft². Für $P(c, d)$ besitzt g die Gleichung $xc + (y - a)(d - a) = r^2$, weshalb die Zuordnung $\varphi : g \rightarrow g$ gegeben ist durch

$$P(c, d) \rightarrow P'(c, d') \quad \text{mit} \quad d' = a + \frac{1}{d - a}(r^2 - c^2).$$

Zum einen folgt daraus durch Einsetzen, daß $(P')' = P$ gilt (was man auch durch den sogenannten Hauptsatz der Polarentheorie sofort erkennt), zum anderen zeigt die Anschauung, daß einem P oberhalb der Geraden $y = a$ ein P' unterhalb und umgekehrt

¹Wenn der allgemeine Begriff der Polaren nicht zur Verfügung steht, reicht es, sie als Verbindungsgerade der Berührungspunkte der beiden Tangenten eines außerhalb von k gelegenen Punktes zu betrachten.

²Um diese Ausnahme zu vermeiden, wird üblicherweise das Problem im Rahmen der projektiven Geometrie behandelt.

entspricht. Aufgrund der ersteren Eigenschaft ist φ eine *Involution*, aufgrund der zweiten genauer eine *elliptische*, dh. eine Involution ohne reelle Fixpunkte. Wirklich folgt ja aus $P = P'$, also $d = d'$, das Ergebnis $d = a \pm \sqrt{r^2 - c^2} = a \pm i\sqrt{c^2 - r^2}$. Es gibt also bloß zwei komplexe Fixpunkte mit den Koordinaten $(c, a \pm i\sqrt{c^2 - r^2})$.

Wie man sofort nachrechnet, stimmen diese Werte aber genau mit denen der komplexen Schnittpunkte von Kreis und Gerade überein. Und daher lassen sich die letzteren Punkte durch die involutorische Zuordnung $\varphi : P \rightarrow P'$ für $P \in g$, $P \neq M$, repräsentieren, weil diese sie ja - als ihre Fixpunkte - eindeutig bestimmt. Damit ist die Grundidee von Staudts gegeben, derzufolge ein Ausschnitt, die Fixpunkte (= Schnittpunkte), durch den umfassenden Zusammenhang der Punktebeziehung φ beschrieben wird. Zusätzlich verwendet er noch die beiden Richtungssinne der Geraden g , um die beiden (konjugiert komplexen) Punkte zu unterscheiden. Involution und Richtungssinn stellen also einen komplexen Schnittpunkt dar³.

Dieser Gedankengang wirft auch auf den Fall reeller Schnittpunkte ein neues Licht (Figur 2). Schneidet nämlich die Gerade g den Kreis k in zwei⁴ Punkten, so kann man völlig analog wie zuvor jedem $P \in g$ mittels der Polaren p eindeutig ein $P' \in g$ zuordnen. Dabei zeigt die Figur, daß einem außerhalb des Kreises gelegenen Punkt ein innerhalb desselben gelegener entspricht und umgekehrt⁵. Wieder erhält man eine involutorische Beziehung, die diesmal aber *hyperbolisch* ist, da die Fixpunkte reell sind - sie stimmen nämlich wieder gerade mit den Schnittpunkten überein. Dies bestätigt auch die Rechnung, die sich gegenüber vorhin überhaupt nicht ändert. Jetzt erscheinen also die Schnittpunkte S_1, S_2 , die man üblicherweise als den einzigen Ausdruck der Beziehung von Kreis und schneidender Gerade ansieht, nur als ein *sichtbares* Zeichen für den umfassenden Zusammenhang der hyperbolischen Involution. Sie sind aber insofern ausgezeichnet, als sie letztere eindeutig festlegen; denn wie man sofort berechnet gilt $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = \overline{MS_1}^2 (= \overline{MS_2}^2)$ für $M(c, a)$.

Hat man also die zwei Punkte S_1, S_2 auf einer Geraden gegeben, so erhält man die zugehörige hyperbolische Involution, deren Fixpunkte sie sind, aufgrund letzterer Beziehung, wobei M der Mittelpunkt von S_1 und S_2 ist und P' jeweils auf derselben

³Nicht nur auf g kann ein Schnittpunkt so repräsentiert werden, sondern auch auf k . Und zwar ist $Q \in k$ derjenige Punkt $Q' \in k$ involutorisch zugeordnet, für welchen die Verbindungsgerade (Q, Q') durch den Pol von g geht; zugleich wird wieder ein Richtungssinn auf k ausgezeichnet. Im weiteren wird darauf aber nicht näher eingegangen.

⁴Den *parabolischen* Fall, daß g Tangente an k ist, nimmt man meistens aus, da dann die Zuordnung φ nicht injektiv ausfällt.

⁵Es genügt auch hier, den Begriff der Polare nur im ersteren Fall zu kennen. Aufgrund der arithmetischen Beziehungen kann man die Zuordnung für die inneren Punkte, da sie involutorisch ausfallen soll, einfach per definitionem festlegen.

Seite wie P bzgl. M liegt. (Insbesondere folgt daraus, daß sämtliche Kreise durch S_1 und S_2 auf g dieselbe Involution induzieren. Für die Konstruktion erweist sich dabei der Kreis mit Mittelpunkt M am günstigsten.) Zusammenfassend zeigt also der Fall reeller Schnittpunkte, daß sich die Beziehung von g und k in einer hyperbolischen Involution auf g^3 manifestiert, die wiederum eindeutig festgelegt wird durch eben diese Schnittpunkte.

Ähnlich versuchte L. Locher-Ernst nun auch, die elliptische Involution durch zwei ausgezeichnete *reelle* Punkte eindeutig zu repräsentieren. Es zeigt sich, daß in Analogie zum vorigen Fall die zwei einzigen zu $M(c, a)$ symmetrisch liegenden, einander zugeordneten Punkte $N(c, d)$, $N'(c, d')$ dies leisten. Da nämlich $\frac{d+d'}{2} = a$ sein soll und $d' = a + \frac{1}{d-a}(r^2 - c^2)$ gilt, folgt zunächst $d = a \pm \sqrt{c^2 - r^2}$. Dh., diese Punkte erhält man aus den komplexen Schnittpunkten einfach dadurch, daß man das i "wegläßt". Geometrisch findet man sie wegen $\overline{MB} = \sqrt{c^2 - r^2} = \overline{MN}$ leicht, wo B ein Berührungspunkt der von M aus an k gelegten Tangente ist (s. Figur 1). Sodann legen N, N' die Involution wirklich eindeutig fest, denn es gilt wieder $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = \overline{MN}^2$ für einander zugeordnete Punkte P, P' , wobei P' diesmal auf der anderen Seite von M wie P zu liegen kommen muß. Statt genau das Punktepaar (N, N') mit den beiden Richtungssin- nen als Repräsentanten der konjugiert komplexen Schnittpunkte auszuwählen, nimmt Locher-Ernst die "Pfeile" \overrightarrow{MN} bzw. $\overrightarrow{MN'}$.

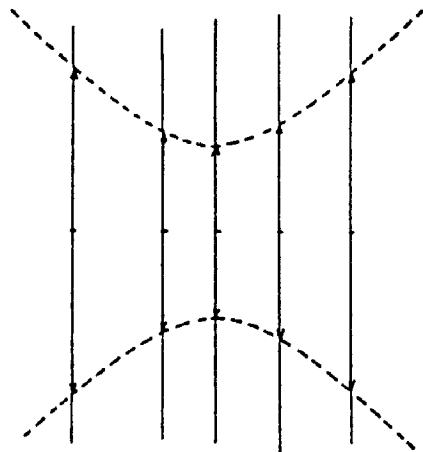
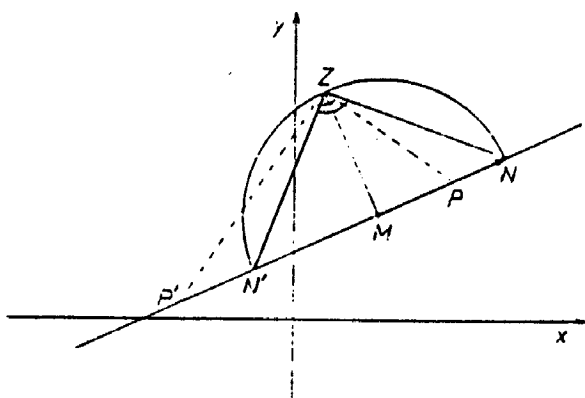


Fig. 3 & 5

Dies motiviert die folgende allgemeine Darstellung: Der komplexe Punkt $R(r + is, u + iv)$ wird durch den Pfeil \overrightarrow{MN} veranschaulicht mit $M(r, u)$ und $N(r + s, u + v)$ (= i "weggelassen") - seine Trägergerade ist dabei genau die eingangs erwähnte

eindeutig bestimmte reelle Gerade, auf der R liegt⁶. Der Pfeil zeigt die Durchlaufungsrichtung der Geraden $\langle M, N \rangle$ an und M, N selbst legen die elliptische Involution gemäß obigen beiden Bedingungen fest ($\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = \overline{MN}^2$ + Lagebedingung). Auf diese Weise ist also jeder komplexe Punkt *eindimensional* dargestellt, wobei sich für reelle Punkte nichts ändert, da ihnen Pfeile der Länge 0 entsprechen. – Geometrisch kann man bei Vorgabe von M, N zunächst N' sofort konstruieren und dann leicht aufgrund des Höhensatzes ($\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = \overline{MZ}^2 = \overline{MN}^2$ in Figur 3) die involutorische Beziehung angeben.

Von den vielen Anwendungsmöglichkeiten dieser Veranschaulichung komplexer Zahlenpaare seien nur wenige vorgestellt, wobei vor allem die erste auch für den Schulunterricht interessant ist.

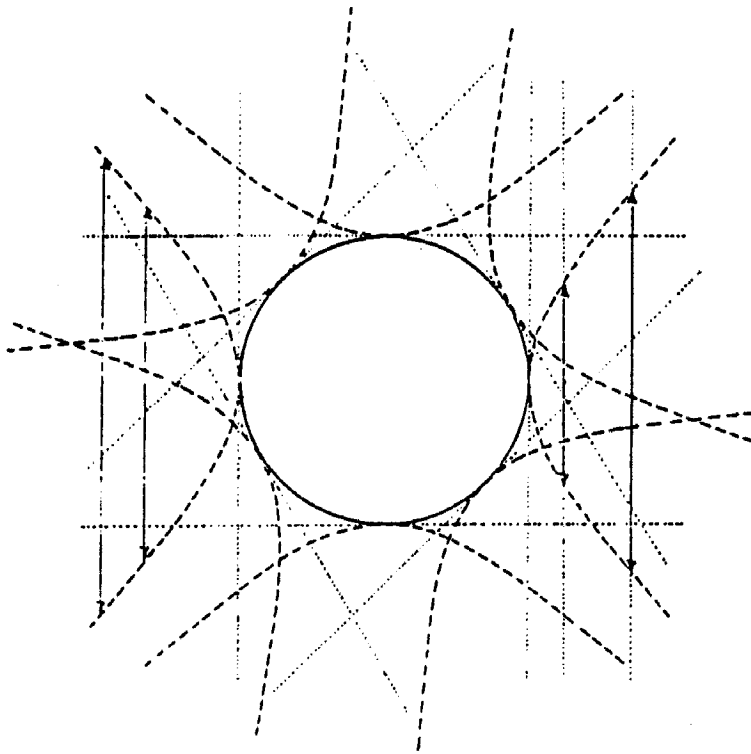


Fig. 4

1) *Der komplexe Kreis.* Da jeder nicht reelle Punkt eines Kreises auf genau einer

⁶Die andere damals gestellte Frage wird dadurch beantwortet, daß $2\sqrt{r^2 - c^2} = \overline{NN'}$ = $\min \overline{PP'}$ ist, der dortige Imaginärteil mithin angibt, wie nahe sich die involutorisch zugeordneten Punkte höchstens kommen können.

reellen Geraden liegt, erhält man alle Punkte eines Kreises dadurch, daß man sämtliche reellen Geraden mit ihm schneidet. Am besten führt man dies zunächst für die Parallelenschar der vertikalen Geraden durch und rotiert anschließend das Ganze um den Kreismittelpunkt (Figur 4). Jene Geradenschar liefert außer dem reellen Kreis eine gleichseitige Hyperbel, auf der die Endpunkte der Pfeile liegen. Da die Pfeile Richtungssinne auszeichnen, stellt man sich vorteilhafterweise auf jeder der außerhalb des Kreises liegenden Geraden einen gesetzmäßigen Bewegungsvorgang vor, indem P die Gerade in einer Richtung durchläuft und P' hinterherläuft, wobei sie sich bei $P = N, P' = N'$ am nächsten kommen. Je näher die Gerade zum Kreis liegt, umso näher gelangen N und N' , bis sie sich schließlich im Falle der Tangente treffen. Schreitet man weiter in Richtung des Mittelpunktes, vollführen P bzw. P' auf den einzelnen Geraden eine gegenläufige Bewegung, deren Treffpunkte gerade die Kreislinie bilden. Analoges gilt für jede beliebige Parallelenschar von Geraden. Die Ebene ist also gewissermaßen von einem Geflecht von Bewegungen durchzogen, welches im sichtbaren Kreis gerinnt.

Auf gleiche Weise erhält man sämtliche komplexen Punkte anderer Kurven, nur muß man meist mehrere Parallelenscharen von Geraden mit ihr schneiden, um ein deutliches Bild zu bekommen.

2) *Kreis mit imaginären Radius.* Schneidet man eine Kugel K mit einer daran vorbeilaufenden Ebene ϵ erhält man einen Kreis mit imaginären Radius. Wir beschränken uns auf den konkreten Fall $K: x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ und $\epsilon: z = c$ mit $|c| > r$, da der allgemeine völlig analog behandelt werden kann. Als Schnittkurve erhält man in der $(z = c)$ -Ebene $x^2 + y^2 = r^2 - c^2$, also einen Kreis vom Radius $i\sqrt{c^2 - r^2}$. Dessen Veranschaulichung erhält man wie zuvor, indem man zunächst die Geraden parallel zur y -Achse mit ihm schneidet. Das führt auf Figur 5, die man sich wieder um den Mittelpunkt $(0, 0, c)$ in der $(z = c)$ -Ebene rotiert denken muß, wodurch dann die Hyperbeln einen unsichtbaren Kreis einhüllen.

3) *Imaginäre Gerade in der Ebene I.* Hier sei der Fall betrachtet, daß die Gerade durch einen reellen Punkt S und einen komplexen Punkt R gegeben sei. Eingesetzt in die Zweipunktform einer Geraden erhält man dann eine Gleichung mit im allgemeinen komplexen Koeffizienten. Diese veranschaulicht man einfach dadurch, daß man sämtliche Punkte der Trägergeraden g von R mit S verbindet, wodurch man ein Geradenbündel in S erhält⁷, auf welches man die R entsprechende hyperbolische Involution sowie den Durchlaufungssinn überträgt (Figur 6).

Beispielsweise lassen sich so leicht die Tangenten an einen Kreis k aus einem inneren Punkt S darstellen (Figur 7). Man schneidet die Polare s von S ⁸, welche dann

⁷Falls $S \in g$ ist natürlich schon g die gesuchte Gerade.

⁸Diese wird zur Ferngeraden, falls S der Kreismittelpunkt ist. Im mit einem Richtungssinn

ganz im Äußeren verläuft, mit k , wodurch man zwei konjugiert komplexe Schnittpunkte erhält. Deren Verbindungsgerade mit S liefert die gesuchten Tangenten.

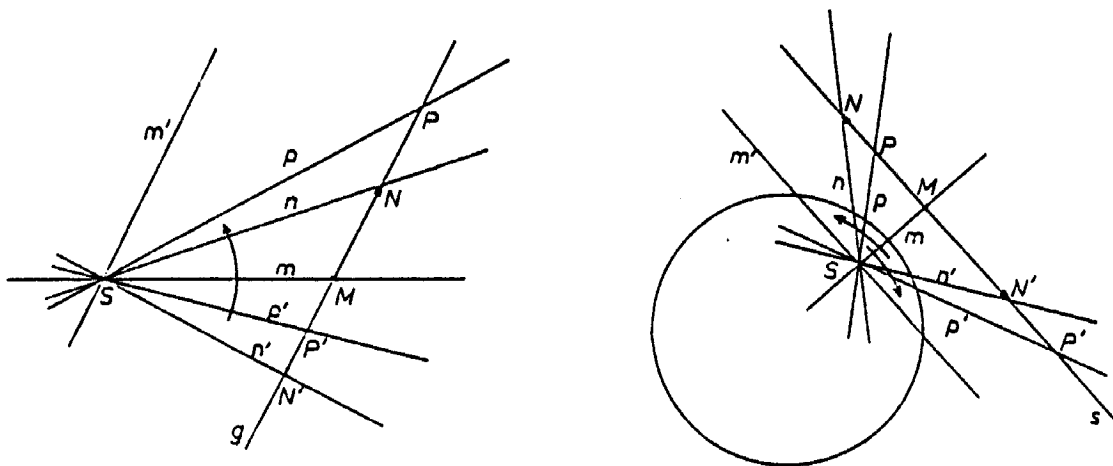


Fig. 6 & 7

4) *Imaginäre Gerade in der Ebene II.* Nun sei die Gerade durch zwei komplexe Punkte R, S gegeben. Wie zuvor hat dann die Gleichung die Gestalt $c_1x + c_2y + c_0$ mit gewissen $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Falls eine solche komplexe Gerade nicht reell ist, besitzt sie genau einen reellen Punkt T . Aus der Gleichung

$$(a_1 + ib_1)x + (a_2 + ib_2)y + (a_0 + ib_0) = 0 \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}$$

folgt nämlich durch Vergleich der Real- bzw. Imaginärteile

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y + a_0 &= 0, \\ b_1x + b_2y + b_0 &= 0. \end{aligned}$$

Geometrisch gesehen sind dies zwei Geraden h_1, h_2 , die nicht zusammenfallen können, andernfalls $a_i = \lambda b_i$ für $i = 0, 1, 2$ gelten würde und somit die gegebene Gerade doch reell gewesen wäre. Der eindeutige Schnittpunkt (falls h_1, h_2 parallel sind, ist es deren Fernpunkt) ist jener reelle Trägerpunkt T der imaginären Geraden. Verbindet man nun diesen mit R (oder S) wie in 3) erhält man die gesuchte Gerade $\langle R, S \rangle$. Die direkte geometrische Konstruktion des Punktes T aus den R, S entsprechenden Pfeildarstellungen ist zwar nicht schwer, doch sei diesbezüglich auf [2] verwiesen. Dort versehenen Geradenbüschel von S erhält man dann die Rechtwinkelinvolution, dh. jeder Geraden wird die dazu senkrechte zugeordnet.

findet man auch eine Fülle weitergehender Beispiele vor allem räumliche Fragestellungen betreffend – unter anderem die Veranschaulichung der beiden Scharen komplexer Geraden auf einer Kugel.

Literatur

- [1] KLEIN, F.: Zur Interpretation der komplexen Elemente in der Geometrie. Math. Ann. 22, 242–245 (1883).
- [2] LOCHER-ERNST, L.: Das Imaginäre in der Geometrie. Elem. Math. 4, 97–105 und 121–128 (1949).
- [3] STAUDT, Chr. v.: Beiträge zur Geometrie der Lage. 3 Hefte. Nürnberg. 1856–1860.